Cours CALCULS DE SOMMES

1 Raisonnement par récurrence et symbole $\sum$

Raisonnement par récurrence

Méthode

Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de montrer qu'une propriété est vraie à partir d'un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
On considère $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ un propriété à prouver $\forall n \geq n_0$.

1. Définir la propriété $\mathcal{P}(n)$
   « Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : ... »
2. Montrer que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour un rang d'initialisation $n_0 \in \mathbb{N}$ donné (*ou à déterminer*).
   C'est l'étape d'**initialisation**.
3. Supposes que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout entier n et montre que cette affirmation est vraie au rang $n+1$.
   C'est l'étape de l'**hérédité**.
4. Conclure : Alors $\forall n \geq n_0$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple

Montrer que $2^n \geq n+1$ pour tout $n \geq 0$.

» Étape 1 – Définir la propriété
Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\text{« } 2^n \geq n+1, \quad \forall n \geq 0 \text{ »}$$

» Étape 2 – Initialisation
Il faut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n plus grand ou égal à 0.
Posons alors $n_0 = 0$ et montrons que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

$$2^0 = 1 \text{ et } 0+1 = 1$$

On a donc bien $2^0 \geq 0+1$ ainsi $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

» Étape 3 – Hérédité
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un n fixé, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

$$2^{n+1} = 2^n \times 2 \text{ et } n+1+1 = n+2$$

Par hypothèse on a :

$$2^n \geq n+1$$
$$2^{n+1} \geq 2(n+1) \geq n+2$$

» Étape 4 – Conclusion
Ainsi, par le principe de récurrence, l'on a montré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Le symbole $\sum$ et ses propriétés

Le symbole $\sum$

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \leq n$, $a_m, a_{m+1}, \ldots \in \mathbb{K}$.
On définit **la somme des a_k allant de m à n** par :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Exemple

La somme des entiers naturels inférieurs à n.

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+3+\ldots+n$$

La somme des entiers pairs inférieurs à n.

$$\sum_{k=0}^{n} 2k = 0+2+4+6+\ldots+2n$$

Sommes et récurrence

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \leq n$, $a_m, a_{m+1}, \ldots \in \mathbb{K}$.
On définit **la somme des a_k allant de m à n** par :

- Si $m = n$: $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_n$
- Si $m < n$: $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n$

Propriété

Décomposition de la somme

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \leq n$, $a_m, a_{m+1}, \ldots \in \mathbb{K}$.

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

Propriété

Somme et scalaire

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \leq n$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{k}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2}$$

Je peux « **décomposer** » la somme en deux parties.

$$\sum_{k=0}^{n} 2k = 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)$$

Puisque 2 n'est pas un terme qui dépend de k dans la somme, alors je peux l'extraire de la somme et le mettre devant, cela ne changera pas l'issue du résultat.

2 Somme télescopique et binôme de Newton

Somme télescopique

Somme télescopique

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \leq n$. Une somme S est dite **télescopique** lorsque celle ci peut s'écrire sous la forme :

$$S = \sum_{k=m}^{n} (u_{k+p} - u_k)$$

où $p \in \mathbb{Z}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}$.

Remarque

Les sommes télescopiques peuvent se calculer très simplement et rapidement, voyons maintenant comment on fait cela.

Méthode

Calculer une somme télescopique

Cette méthode permet de calculer les sommes de la forme $S = \sum\limits_{k=m}^{n} (u_{k+p} - u_k)$.

1. Séparer les sommes.

$$S = \sum_{k=m}^{n} u_{k+p} - \sum_{k=m}^{n} u_k$$

2. Poser $j = k + p$.
3. Effectuer le changement d'indice.

$$S = \sum_{j=m+p}^{n+p} u_j - \sum_{k=m}^{n} u_k$$

Pensez à changer les DEUX bornes de la somme concernée !

4. Écrire les sommes de la forme :

$$S = (u_j + u_{j+1} + \ldots + u_n + \ldots + u_{n+p}) - (u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n)$$

5. Simplifier les termes.
6. Conclure sur le résultat final de la somme.

Exemple

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

» Étape 1 – Séparer les sommes

En séparant la somme S au extrémités de la soustraction, on obtient :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

» Étape 2 – Poser le nouvel indice

La seule chose qui change entre les deux sommes c'est le dénominateur, nous ce qu'on veut c'est avoir deux sommes relativement égales donc on vas poser $j = k + 1$ pour la seconde somme.

» Étape 3 – Changement d'indice

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{j}$$

» Étape 4 – Écriture des sommes avec les pointillés

$$S = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

» Étape 5 – Simplification des termes qui apparaissent dans les 2 sommes

$$S = \left(\frac{1}{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\ldots} + \cancel{\frac{1}{n}} \right) - \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\ldots} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} \right) = 1 + \frac{1}{n+1}$$

» Étape 6 – Conclure

$$\boxed{S = 1 + \frac{1}{n+1}}$$

Binôme de Newton

Remarque

La formule du binôme de newton est une généralisation de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Factoriel

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On appelle **factoriel n** l'entier noté $n!$ défini par :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$$

Exemple

On souhaite calculer $4!$.
O fais le **produit des k allant de 1 à 4**.

$$4! = \prod_{k=1}^{4} k = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

Exemple

Calculons $\binom{3}{2}$.

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{6}{1 \times 2} = \frac{6}{2} = 3$$

Il existe une autre méthode plus simple...

coefficient binomial

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$.
L'entier noté $\binom{n}{k}$ est appelé **coefficient binomial** et est défini par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

La proposition précédente donne une méthode de calcul des coefficients binomiaux mais la formule reste compliquée à utiliser a priori. Néanmoins, cette proposition peut être illustrée simplement par le **triangle de Pascal**.

Méthode

Calculer un coefficient binomial : Triangle de Pascal

Voici le triangle de Pascal pour $n \in [\![1;6]\!]$.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Ce tableau se construit en écrivant le chiffre 1 tout à gauche et tout à droite, ensuite chaque case du tableau s'obtient en additionnant le chiffre de la case du dessus avec celui à sa gauche.
Le triangle de Pascal permet de calculer facilement $\binom{n}{k}$.
La construction du triangle sera revu pendant le tutorat.

Formule du binôme de Newton

Les formules suivantes sont équivalentes, une des deux est à connaître par coeur.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$
Alors on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Produit et symbole $\prod$

Le symbole $\prod$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ et $m, n\mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.
Alors le **produit des u_k allant de m à n** est défini par :

$$\prod_{k=m}^{n} u_k = u_m \times u_{m+1} \times \ldots \times u_n$$

Propriété

PRODUIT ET RÉCURRENCE

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \leq n$, $a_m, a_{m+1}, \ldots \in \mathbb{K}$.
On définit **le produit des a_k allant de m à n** par :

- Si $m = n$: $\prod_{k=m}^{n} a_k = a_n$
- Si $m < n$: $\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m}^{n-1} a_k \times a_n$

Propriété

DÉCOMPOSITION DU PRODUIT

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \leq n$, $a_m, a_{m+1}, \ldots \in \mathbb{K}$.

$$\prod_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$$